

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

**ДОСЛІДЖЕННЯ КІНЕМАТИЧНИХ ПЕРЕДАТОЧНИХ
ФУНКЦІЙ ШВМ З ВИКОРИСТАННЯМ ЕОМ»**

Методичні вказівки
до вивчення курсу та виконання курсових проектів
з дисципліни «Теорія механізмів і машин»

для студентів машинобудівних спеціальностей
усіх форм навчання

6.050502 – Інженерна механіка

Київ - 2011

Вступ

Згідно з визначенням механізму, як системи тіл, призначеної для перетворення руху одного або кількох твердих тіл та (або) сил до них прикладених, в необхідні рухи інших тіл та (або) сил, з якими ці тіла можуть взаємодіяти з іншими тілами або середовищами, однією з функцій механізму є виконання потрібних рухів, які в свою чергу описуються кінематичними характеристиками. До них відносяться траєкторії точок рухомих ланок, координати точок і ланок механізму, перш за все узагальнені координати його, переміщення точок і ланок, швидкості та прискорення їх. До складу кінематичних функцій відносяться також і такі, що не залежать від законів руху початкових ланок. Такими є функції положень та аналоги швидкостей і прискорень – кінематичні передаточні функції швидкостей та прискорень, окремих точок та ланок в цілому, які не залежать від часу і визначаються лише кінематичною схемою механізму і положенням його ланок, тобто характеризують кінематичні параметри механізму незалежно від законів зміни узагальнених координат в часі.

Мета та основні завдання роботи.

Сутність аналітичного методу кінематичного аналізу механізмів полягає в тому, що лінійні і кутові координати, швидкості та прискорення окремих точок рухомих ланок і ланок в цілому, відповідні кінематичні передаточні функції записуються у вигляді аналітичних виразів, які містять скінченну кількість алгебраїчних чи тригонометричних операцій. Аналітичні вирази, при цьому можуть визначати ту чи іншу функцію явно, неявно або в параметричному виді.

Наданий матеріал покликаний допомогти студентам у поглибленому вивченні питань теорії створення алгоритмів кінематичного дослідження шарнірно-важільних механізмів аналітичним способом набутті практичних умінь та навичок розв'язання практичних задач даного спрямування з використанням ЕОМ.

Вихідні дані

1. Кінематична схема механізму, рис. 1., побудована з масштабним коефіцієнтом $\mu_l, \frac{м}{мм}$, яка визначає будову механізму, принцип дії та розміри ланок: $l_0 = 0,42м$, $l_1 = 0,12м$, $l_3 = 0,84м$, $l_5 = 0,5234м$, $a = 0,29м$.

2. Закон руху початкової ланки: за початкову обираємо ланку 1 (кривошип O_1A); узагальненою координатою механізму при цьому буде кут φ_1 повороту ланки 1, відкладений відносно додатного напрямку осі O_1x (в напрямку обертання ланки); закон руху початкової ланки це залежність $\varphi_1 = \varphi_1(t)$. В даному прикладі залежність $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ незадана, в зв'язку з чим вважаємо, що початкова ланка обертається відносно точки O_1 рівномірно з деякою кутовою швидкістю $\omega_1 = const$, а рівняння геометричних і

кінематичних співвідношень в механізмі записуємо в функції узагальненої координати.

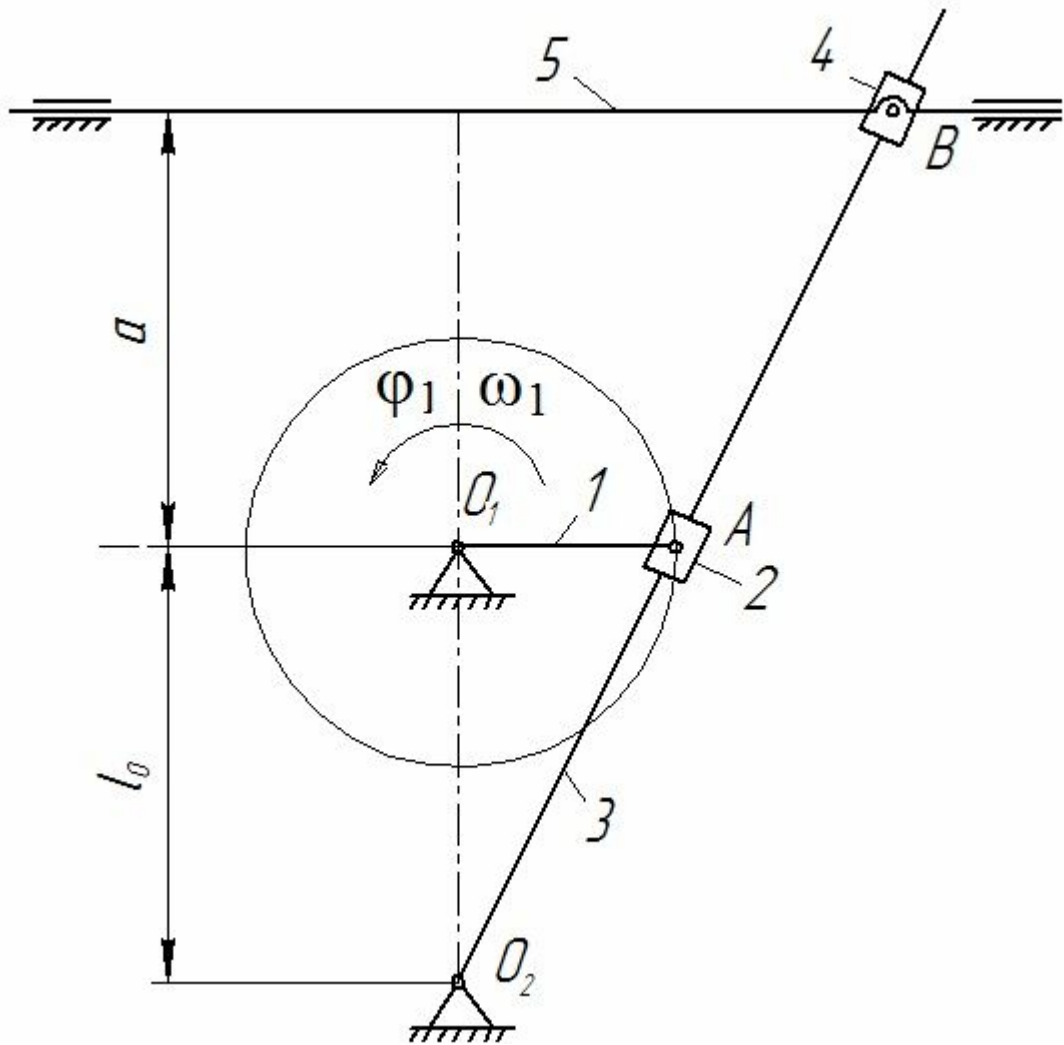


Рис. 1.

1. Структурний аналіз механізму

Метою структурного аналізу є:

- визначення фактичного числа степенів свободи механізму W_ϕ ;
- перевірка механізму на статичну визначеність (відсутність надлишкових зв'язків);
- запис формули структурної будови механізму і визначення його класу;
- складання схеми структурної будови механізму, визначення замкнутих контурів, утворених ланками.

Фактичне число степенів свободи механізму відповідає кількості його узагальнених координат, приписаних початковій ланці (ланкам).

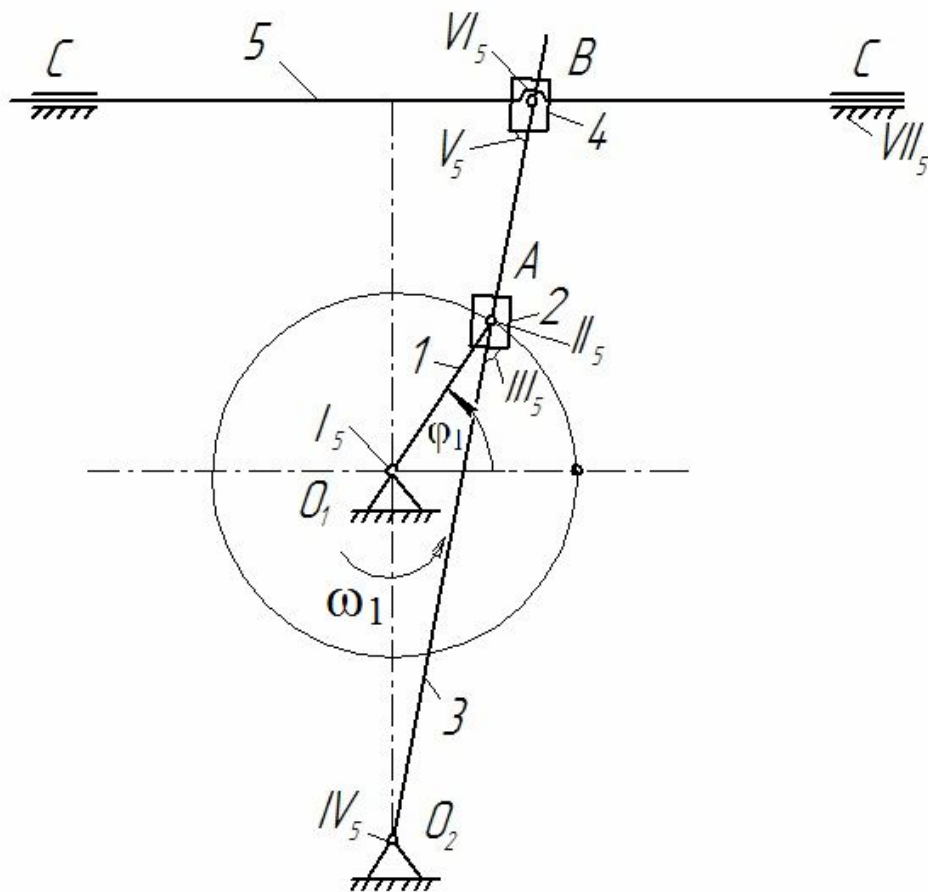


Рис. 2.

При обраній за початкову ланку I , кривошип O_1A , узагальненою координатою буде одна, кутова координата, а саме – кут повороту φ_1 ланки I відносно додатного напрямку осі O_1x . Згідно з цим, констатуємо, що фактичне число степенів свободи досліджуваного механізму становить $W_\varphi = 1$.

Застосовуючи формальний спосіб одержуємо таке ж саме число степенів свободи для початкового механізму (механізму першого класу) $I(0,1)$, в якому початкова ланка, кривошип 1, утворює зі стояком, нульовою ланкою, пару I_5 , рис. 2: по формулі Чебишева

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 \quad 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1 = W_\varphi.$$

Число степенів свободи механізму в цілому при $k=6$, $n=5$, $p_5=7$, $p_4=0$, по тій же формулі Чебишева для плоских механізмів $W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1 = W_\varphi$: виконання умови $W = W_\varphi$ свідчить про статичну визначеність механізму (відсутність в ньому надлишкових зв'язків) та відсутність місцевих рухомостей ланок.

Послідовно від'єднуємо від механізму структурні групи другого класу $II(4,5)$ і $II(2,3)$, перевіряючи після кожного від'єднання відповідність числа степенів свободи кінематичного ланцюга, що залишається, числу степенів

свободи досліджуваного механізму в початковому, цілісному, стані та відсутність елементів ланок, які не входять у кінематичні пари; після виділення груп залишається стояк і початкова ланка, які утворюють механізм першого класу $I(0,1)$, початковий механізм.

Формула структурної будови механізму

$$I(0,1) \leftarrow II(2,3) \leftarrow II(4,5),$$

яка показує послідовність утворення механізму, шляхом приєднання до початкового механізму структурних груп, та встановлює клас механізму вцілому – за найвищим класом структурної групи, яка входить до його складу механізм має другий клас.

Впорядковуємо кінематичні пари за номерами ланок, які їх утворюють в табличному вигляді.

Номер і клас кінематичної пари	I_5	II_5	III_5	IV_5	V_5	VI_5	VII_5
Номери утворюючих ланок	0,1	1,2	2,3	3,0	3,4	4,5	5,0

На схемі структурної будови механізму, рис. 3, нульову ланку, стояк, і ланку 3 зображуємо у вигляді трикутників, як такі, що утворюють із сусідніми ланками по три кінематичні пари; решту ланок зображуємо у вигляді відрізків прямих, так як кожна з них входить у дві кінематичні пари із сусідніми ланками.

Ланки механізму утворюють два незалежних замкнених контури:

$$(0-1-2-3-0) \text{ і } (0-3-4-5-0).$$

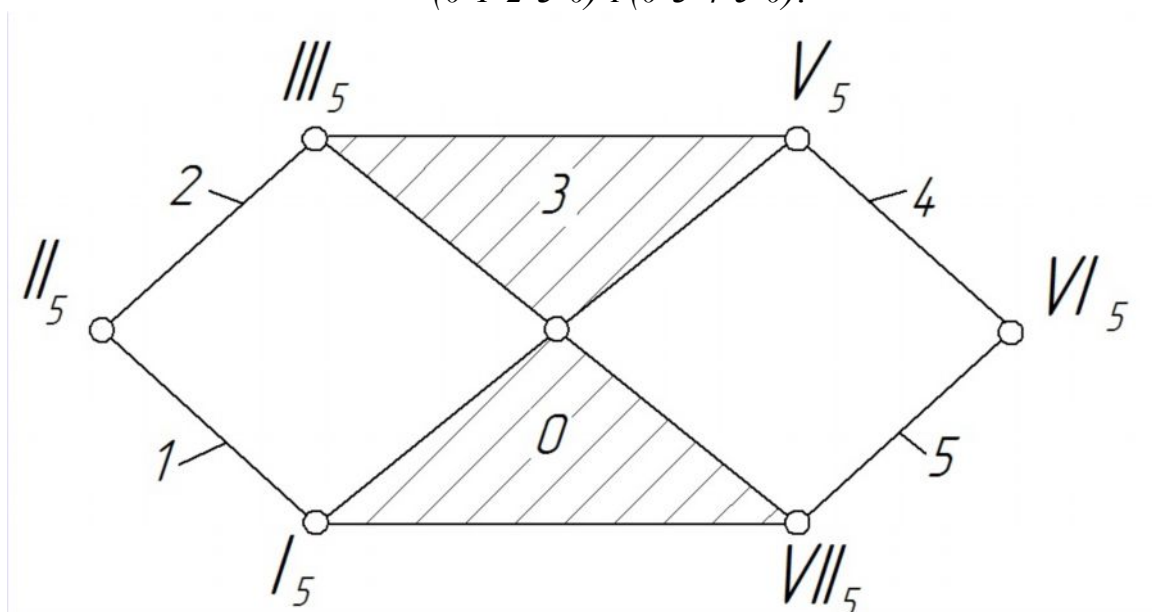


Рис. 3.

2. Геометричний аналіз механізму

Мета геометричного аналізу:

- складання рівнянь геометричного аналізу – умов замкненості контурів у векторному вигляді;
- розв'язання цих рівнянь – знаходження функцій положень ланок (окремих точок, які цим ланкам належать).

Встановлюємо групові координати, рис. 4.

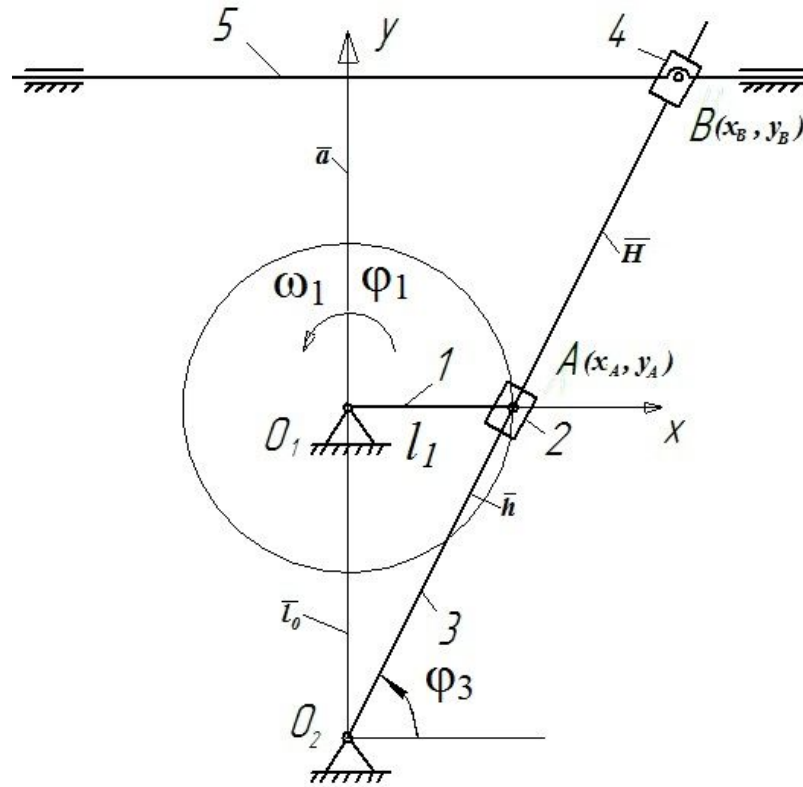


Рис. 4.

φ_1 - узагальнена координата механізму;

φ_3 - кут, який складає вісь ланки 3 з віссю O_2x , $\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_1)$;

\bar{l}_1 - вектор, зв'язаний з початковою ланкою, $l_1 = r_{O_1A}$, м;

\bar{h} , \bar{H} - вектори зв'язані з ланкою 3: $\bar{h} = \bar{h}(\varphi_1)$, $\bar{H} = \bar{H}(\varphi_1)$;

x_A , y_A - координати точки А з ланкою 1: $x_A = x_A(\varphi_1)$, $y_A = y_A(\varphi_1)$;

x_B , y_B - координати точки В з ланкою 3: $x_B = x_B(\varphi_1)$, $y_B = y_B(\varphi_1)$;

\bar{l}_0 , \bar{a} - вектори, зв'язані із стояком: $l_0 = l_{O_1O_2}$, м; величина \bar{a} дорівнює

відстані між точкою O_1 і віссю ланки 5, виміряною вздовж осі O_1y .

Використовуючи метод замкнених векторних контурів знаходимо функції положень ведених ланок та точок, які їм належать.

Для контуру (0-1-2-3-0) умова замкненості у векторному виді

$$\bar{l}_1 + \bar{h}(\varphi_1) = \bar{l}_0.$$

Послідовно визначаємо:

- координати точки А на початковій ланці

$$x_A = x_A(\varphi_1) = l_1 \cos \varphi_1,$$

$$y_A = y_A(\varphi_1) = l_1 \sin \varphi_1;$$

- проекції вектора $\bar{h} = \bar{h}(\varphi_1)$ на осі координат

$$h_x = h_x(\varphi_1) = x_A(\varphi_1) = l_1 \cos \varphi_1,$$

$$h_y = h_y(\varphi_1) = y_A(\varphi_1) + l_0 = l_1 \sin \varphi_1 + l_0;$$

- його поточне значення (довжина)

$$h = h(\varphi_1) = \sqrt{(h_x(\varphi_1))^2 + (h_y(\varphi_1))^2} = \sqrt{(l_1 \cos \varphi_1)^2 + (l_1 \sin \varphi_1 + l_0)^2} =$$

$$= \sqrt{(l_1 \cos \varphi_1)^2 + (l_1 \sin \varphi_1)^2 + 2l_1 l_0 \sin \varphi_1 + l_0^2} = \sqrt{l_1^2 + 2l_1 l_0 \sin \varphi_1 + l_0^2};$$

- поточне значення кута φ_3

$$\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_1) = \pm \arccos \frac{h_x(\varphi_1)}{h(\varphi_1)} = \pm \arccos \frac{l_1 \cos \varphi_1}{\sqrt{l_1^2 + 2l_1 l_0 \sin \varphi_1 + l_0^2}}.$$

Подвійний знак перед $\varphi_3(\varphi_1)$ вказує на два можливі рішення: цим рішенням відповідають два симетричні положення ланок 1, 2 і 3, рис. 5.

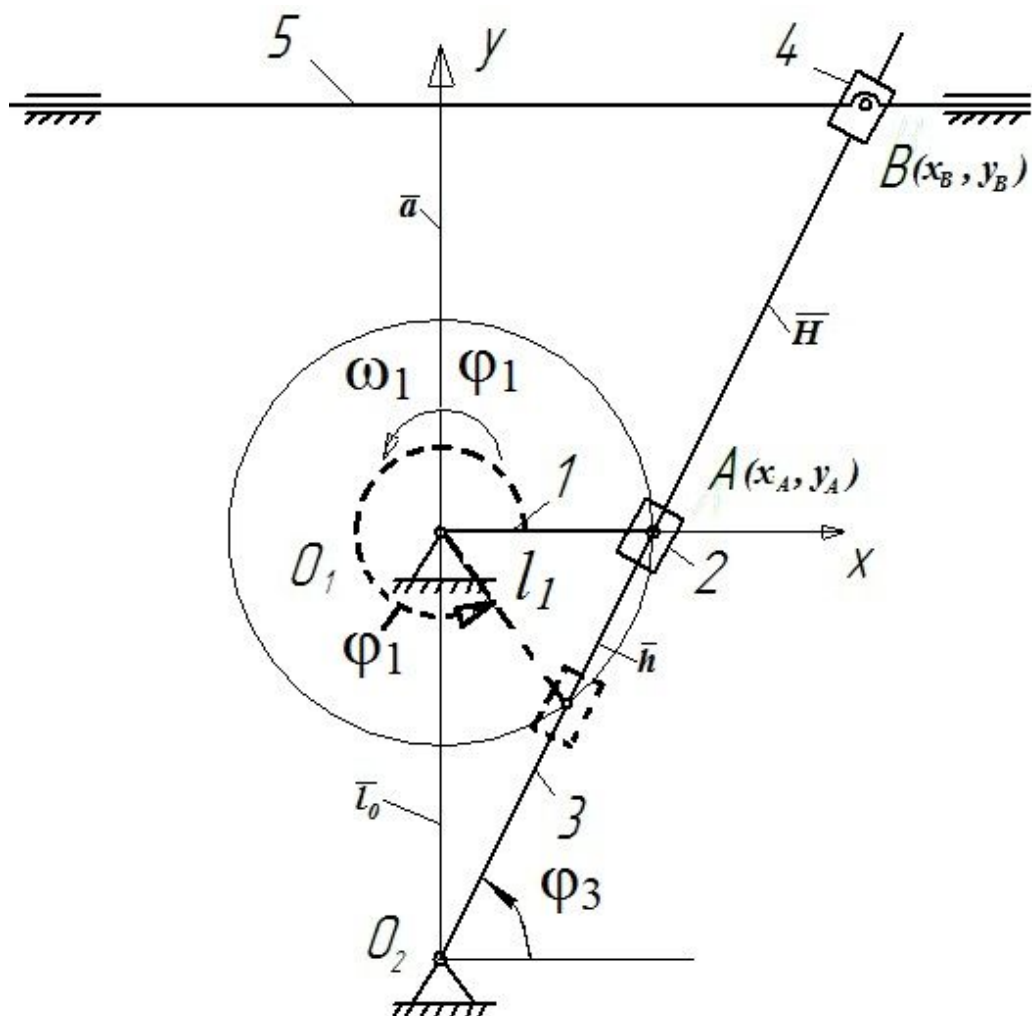


Рис. 5.

Графіки $h = h(\varphi_1)$ і $\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_1)$ для $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$ показані на рис.6.

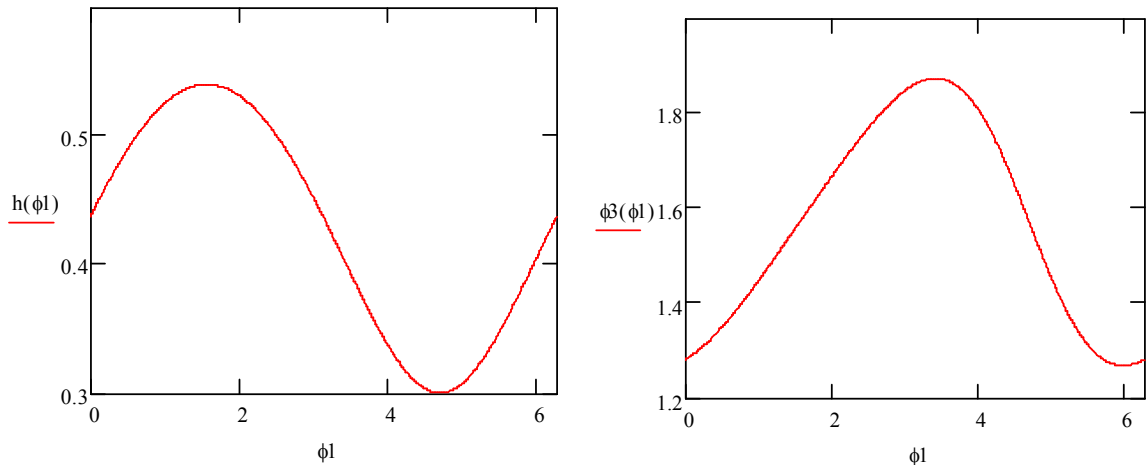


Рис. 6.

Умова замкненості контуру (0-3-4-5-0) у векторному виді

$$\bar{l}_3 + \bar{x}_B(\varphi_1) - \bar{l}_0 - \bar{a},$$

тут $\bar{l}_3 = \bar{h}(\varphi_1) + \bar{H}(\varphi_1)$.

Далі знаходимо

- проєкції вектора $\bar{H} = \bar{H}(\varphi_1)$ на осі координат

$$\begin{aligned} H_x = H_x(\varphi_1) &= \frac{a - y_A(\varphi_1)}{\operatorname{tg} \varphi_3} = \frac{(a - y_A(\varphi_1)) h_x(\varphi_1)}{h_y(\varphi_1)} \\ &= \frac{(a - y_A(\varphi_1)) x_A(\varphi_1)}{y_A(\varphi_1) + l_0} = \frac{(a - l_1 \sin \varphi_1) l_1 \cos \varphi_1}{l_1 \sin \varphi_1 + l_0}, \end{aligned}$$

$$H_y = H_y(\varphi_1) = a - y_A(\varphi_1) = \frac{a - y_A(\varphi_1)}{\operatorname{tg} \varphi_3} = a - l_1 \sin \varphi_1;$$

- його поточне значення (довжину)

$$\begin{aligned} H = H(\varphi_1) &= \sqrt{(H_x(\varphi_1))^2 + (H_y(\varphi_1))^2} = \sqrt{\left(\frac{(a - y_A(\varphi_1)) x_A(\varphi_1)}{y_A(\varphi_1) + l_0} \right)^2 + (a - y_A(\varphi_1))^2} = \\ &= \frac{a - l_1 \sin \varphi_1}{l_1 \sin \varphi_1 + l_0} \sqrt{l_1^2 + 2l_1 l_0 \sin \varphi_1 + l_0^2}; \end{aligned}$$

координати точки B на ланці 3

$$x_B = x_B(\varphi_1) = x_A + H_x(\varphi_1) = l_1 \cos \varphi_1 + \frac{(a - l_1 \sin \varphi_1) l_1 \cos \varphi_1}{l_1 \sin \varphi_1 + l_0},$$

$$y_B = y_B(\varphi_1) = a.$$

Графіки $H = H(\varphi_1)$ і $x_B = x_B(\varphi_1)$ для $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$ показані на рис. 7.

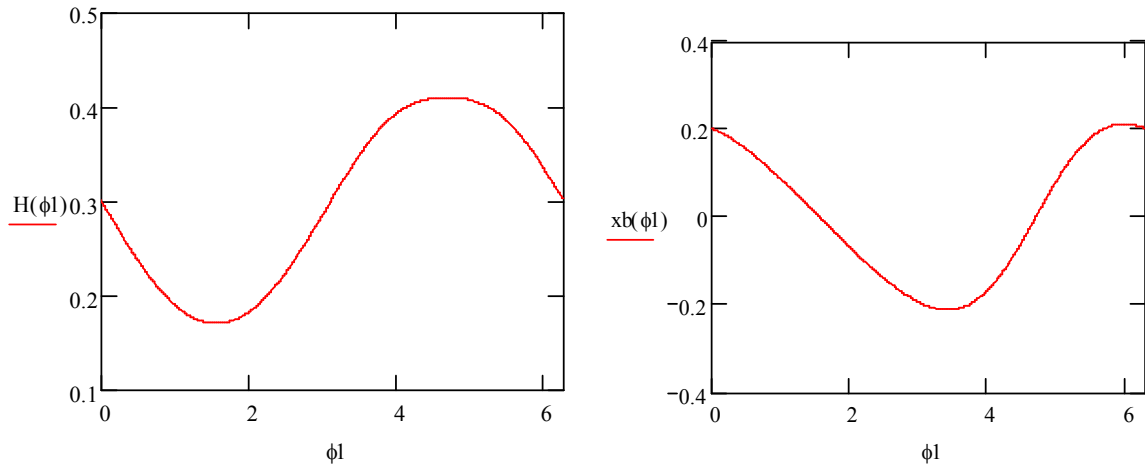


Рис. 7.

Записуємо рівняння контуру (0-1-2-3-0) в неявному виді і одержуємо систему лінійних рівнянь

$$F_1 = x_A - h \cos \varphi_3,$$

$$F_2 = y_A - h \sin \varphi_3.$$

Складаємо визначник системи рівнянь

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial h} & \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial h} & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\cos \varphi_3 & h \sin \varphi_3 \\ -\sin \varphi_3 & -h \cos \varphi_3 \end{vmatrix}$$

$$= h \cos^2 \varphi_3 + h \sin^2 \varphi_3 = h.$$

Прирівнюючи визначник до нуля, знаходимо значення h при яких група $\Pi(2,3)$ потрапляє в особливе положення (при $h = 0$), рис. 8.

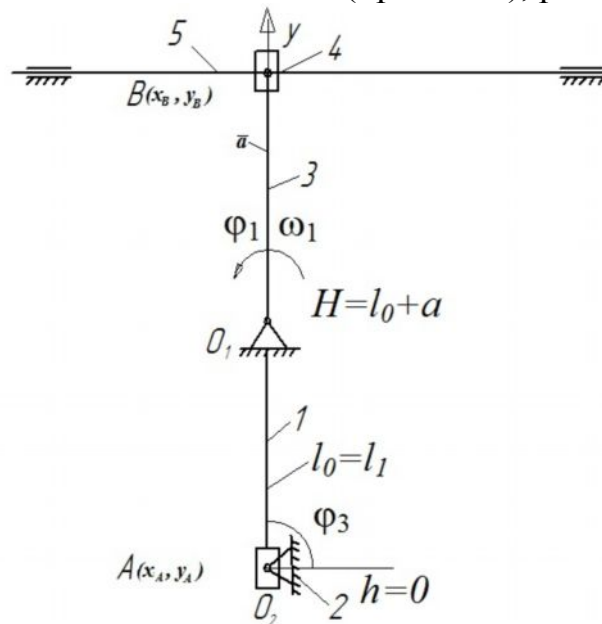


Рис. 8.

Рівняння контуру (0-3-4-5-0) в неявному вигляді також будуть представлені системою лінійних рівнянь

$$F_1 = x_B - x_A - H \cos \varphi_3,$$

$$F_2 = a - y_A - H \sin \varphi_3.$$

Складаємо визначник системи

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_B} & \frac{\partial F_1}{\partial H} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_B} & \frac{\partial F_2}{\partial H} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\cos \varphi_3 \\ 0 & -\sin \varphi_3 \end{vmatrix} = -\sin \varphi_3.$$

Група II(4,5) потрапляє в особливе положення при $\varphi_3 = \pi / 2$, $k \in z$, рис.

9.

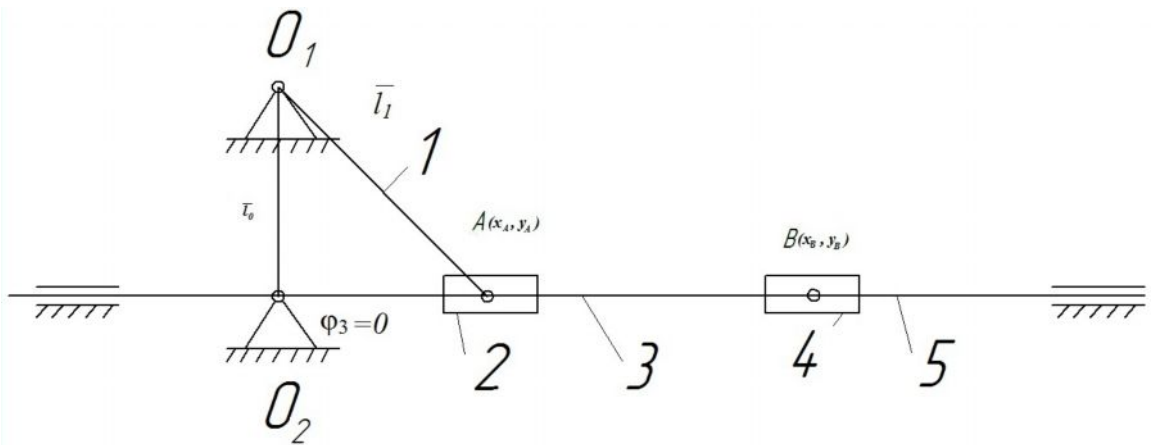


Рис. 9.

3. Кінематичний аналіз механізму

Задача кінематичного аналізу при застосуванні аналітичного методу полягає у знаходженні кінематичних передаточних функцій.

Для визначення передаточних функцій швидкостей окремих точок рухомих ланок і кутових швидкостей ланок рівняння контурів в неявному виді диференціюємо по φ_1 .

Контур (0-1-2-3-0).

Записуємо рівняння контуру, продиференційовані по φ_1 :

$$\frac{\partial x_A}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial h}{\partial \varphi_1} \cos \varphi_3 - \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} h \sin \varphi_3,$$

$$\frac{\partial y_A}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial h}{\partial \varphi_1} \sin \varphi_3 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} h \cos \varphi_3;$$

або

$$v_{\varphi_1 A_x} = v_{\varphi_1 A} \cos \varphi_3 - u_{31} h \sin \varphi_3,$$

$$v_{\varphi_1 A_y} = v_{\varphi_1 A} \sin \varphi_3 - u_{31} h \cos \varphi_3;$$

тут $v_{\varphi_1 A_x} = \frac{v_{A_x}}{\omega_1} = \frac{\partial x_A}{\partial \varphi_1}$ і $v_{\varphi_1 A_y} = \frac{v_{A_y}}{\omega_1} = \frac{\partial y_A}{\partial \varphi_1}$ - передаточні функції проєкцій

швидкості точки А (з ланками 1 і 2) на осі координат O_{1x} і O_{1y} ;

$v_{\varphi_1 A} = \frac{v_{A_2 A_3}}{\omega_1} = \frac{\partial h}{\partial \varphi_1}$ - передаточна функція швидкості руху точки А із

ланкою 2 вздовж ланки 3;

$u_{31} = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1}$ - передаточна функція кутової швидкості ланки 3.

Одержана система рівнянь являється лінійною відносно невідомих $v_{\varphi_1 A}$ і u_{31} . Складаємо визначник системи лінійних рівнянь

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_3 & -h \sin \varphi_3 \\ \sin \varphi_3 & h \cos \varphi_3 \end{vmatrix} \quad h \cos^2 \varphi_3 + h \sin^2 \varphi_3 = h.$$

Визначники D_h і D_{φ_3} отримуємо із D , замінюючи відповідні стовбці із коефіцієнтів при невідомих стовбцями, складеними із вільних членів:

$$D_h = \begin{vmatrix} -l_1 \sin \varphi_1 & -h \sin \varphi_3 \\ l_1 \cos \varphi_1 & h \cos \varphi_3 \end{vmatrix} \quad -l_1 h \sin \varphi_1 \cos \varphi_3 + l_1 h \cos \varphi_1 \sin \varphi_3 =$$

$$= l_1 h (\cos \varphi_1 \sin \varphi_3 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_3) \quad l_1 h \sin(\varphi_3 - \varphi_1),$$

$$D_{\varphi_3} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_3 & -l_1 \sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_3 & l_1 \cos \varphi_1 \end{vmatrix} \quad l_1 \sin \varphi_3 \cos \varphi_1 + l_1 \sin \varphi_3 \sin \varphi_1 =$$

$$= l_1 (\cos \varphi_3 \cos \varphi_1 + \sin \varphi_3 \sin \varphi_1) \quad l_1 \cos(\varphi_3 - \varphi_1).$$

Корені рівнянь системи знаходимо по формулах Крамера

$$v_{\varphi_1 A} = \frac{D_h}{D} = \frac{l_1 h \sin(\varphi_3 - \varphi_1)}{h} \quad l_1 \sin(\varphi_3 - \varphi_1) =$$

$$= l_1 \sin\left(\arccos \frac{l_1 \cos \varphi_1}{\sqrt{l_1^2 + 2l_0 l_1 \sin \varphi_1 + l_0^2}} - \varphi_1\right);$$

$$u_{31} = \frac{D_{\varphi_3}}{D} = \frac{l_1}{h} \cos(\varphi_3 - \varphi_1) =$$

$$= \frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + 2l_0 l_1 \sin \varphi_1 + l_0^2}} \cos\left(\arccos \frac{l_1 \cos \varphi_1}{\sqrt{l_1^2 + 2l_0 l_1 \sin \varphi_1 + l_0^2}} - \varphi_1\right).$$

Графіки $v_{\varphi_1 A} = \frac{\partial h}{\partial \varphi_1} = h'(\varphi_1)$ і $u_{31} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} = \varphi_3'(\varphi_1)$ для $\varphi_1 \in [0; 2\pi]$ показані на

рис. 10.

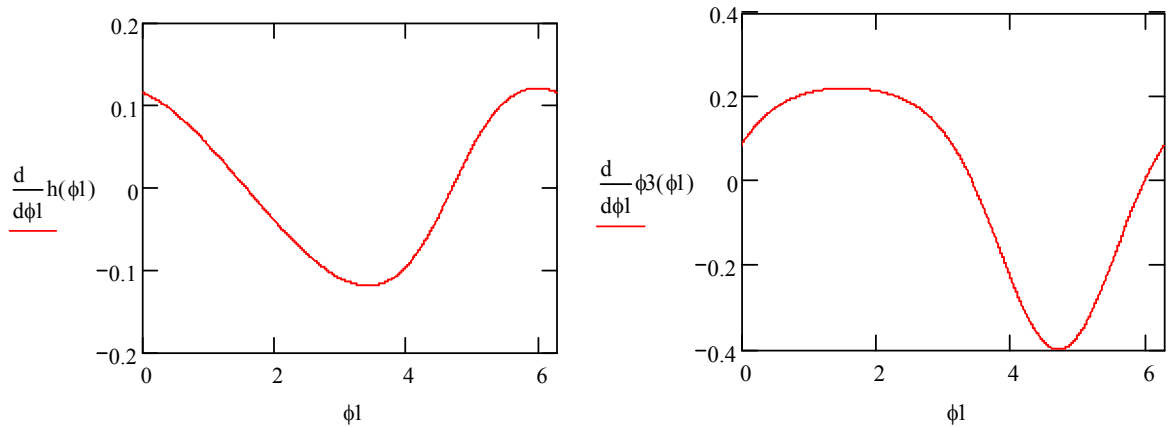


Рис. 10.

Контур (0-3-4-5-0).

Запишемо рівняння контуру, продиференційовані по φ_1 :

$$\frac{\partial x_B}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial x_A}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial H}{\partial \varphi_1} \cos \varphi_3 - \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} H \sin \varphi_3,$$

$$0 = \frac{\partial y_A}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial H}{\partial \varphi_1} \sin \varphi_3 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} H \cos \varphi_3;$$

або

$$v_{\varphi_1 B_x} = v_{\varphi_1 A_x} + v_{\varphi_1 B_3} \cos \varphi_3 - u_{31} H \sin \varphi_3,$$

$$0 = v_{\varphi_1 A_y} + v_{\varphi_1 B_3} \sin \varphi_3 - u_{31} H \cos \varphi_3;$$

де

$$v_{\varphi_1 B_x} = \frac{v_{B_x}}{\omega_1} = \frac{\partial x_B}{\partial \varphi_1} - \text{передаточна функція проєкції швидкості точки В на}$$

вісь O_1x ;

$$v_{\varphi_1 B_3} = \frac{v_{B_3}}{\omega_1} = \frac{\partial H}{\partial \varphi_1} - \text{передаточна функція швидкості руху точки В вздовж}$$

ланки 3.

Одержана система рівнянь є лінійною відносно невідомих $v_{\varphi_1 B_x}$ і $v_{\varphi_1 B}$.

Складаємо визначник лінійної системи рівнянь

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -\cos \varphi_3 \\ 0 & -\sin \varphi_3 \end{vmatrix} = -\sin \varphi_3.$$

Визначники D_{x_B} і D_H одержуємо із D , замінюючи відповідні стовбці із коефіцієнтів при невідомих, стовбцями, складеними із вільних членів:

$$\begin{aligned}
D_{x_B} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_A}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} H \sin \varphi_3 & -\cos \varphi_3 \\ \frac{\partial y_A}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} H \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_{\varphi_1 A_x} - u_{31} H \sin \varphi_3 & -\cos \varphi_3 \\ v_{\varphi_1 A_y} - u_{31} H \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 \end{vmatrix} \\
&= -v_{\varphi_1 A_x} \sin \varphi_3 + u_{31} H \sin^2 \varphi_3 + v_{\varphi_1 A_y} \cos \varphi_3 + u_{31} H \cos^2 \varphi_3 = \\
&= l_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 + l_1 \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 + u_{31} H (\sin^2 \varphi_3 + \cos^2 \varphi_3) = \\
&= l_1 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) + u_{31} H = \\
&= l_1 \cos\left(\arccos \frac{l_1 \cos \varphi_1}{\sqrt{l_1^2 + 2l_0 l_1 \sin \varphi_1 + l_0^2}} - \varphi_1\right) + \frac{a - l_1 \sin \varphi_1}{l_1 \sin \varphi_1 + l_0} \sqrt{l_1^2 + 2l_0 l_1 \sin \varphi_1 + l_0^2} \times \\
&\times \frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + 2l_0 l_1 \sin \varphi_1 + l_0^2}} \cos\left(\arccos \frac{l_1 \cos \varphi_1}{\sqrt{l_1^2 + 2l_0 l_1 \sin \varphi_1 + l_0^2}}\right) = \\
&= l_1 \left(1 + \frac{a - l_1 \sin \varphi_1}{l_1 \sin \varphi_1 + l_0}\right) \cdot \cos\left(\arccos \frac{l_1 \cos \varphi_1}{\sqrt{l_1^2 + 2l_0 l_1 \sin \varphi_1 + l_0^2}} - \varphi_1\right);
\end{aligned}$$

Корені рівнянь системи знаходимо по правилу Крамера:

$$\begin{aligned}
v_{\varphi_1 B_x} &= \frac{D_{x_B}}{D} = \frac{l_1 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) + u_{31} H}{-\sin \varphi_3} = \\
&= -\frac{l_1 \left(1 + \frac{a - l_1 \sin \varphi_1}{l_1 \sin \varphi_1 + l_0}\right) \cos\left(\arccos \frac{l_1 \cos \varphi_1}{\sqrt{l_1^2 + 2l_0 l_1 \sin \varphi_1 + l_0^2}} - \varphi_1\right)}{\sin\left(\arccos \frac{l_1 \cos \varphi_1}{\sqrt{l_1^2 + 2l_0 l_1 \sin \varphi_1 + l_0^2}} - \varphi_1\right)}; \\
v_{\varphi_1 B_3} &= \frac{D_H}{D} = \frac{v_{\varphi_1 A_y} + u_{31} H \cos(\varphi_3)}{-\sin \varphi_3} = \\
&= -\frac{l_1 \left(\cos \varphi_1 + \frac{a - l_1 \sin \varphi_1}{l_1 \sin \varphi_1 + l_0} \cos\left(\arccos \frac{l_1 \cos \varphi_1}{\sqrt{l_1^2 + 2l_0 l_1 \sin \varphi_1 + l_0^2}} - \varphi_1\right) \cos\left(\arccos \frac{l_1 \cos \varphi_1}{\sqrt{l_1^2 + 2l_0 l_1 \sin \varphi_1 + l_0^2}}\right)\right)}{\sin\left(\arccos \frac{l_1 \cos \varphi_1}{\sqrt{l_1^2 + 2l_0 l_1 \sin \varphi_1 + l_0^2}}\right)}.
\end{aligned}$$

Графіки $v_{\varphi_1 B_x} = \frac{\partial x_B}{\partial \varphi_1} = x'_B(\varphi_1)$ і $v_{\varphi_1 B_3} = \frac{\partial H}{\partial \varphi_1} = H'(\varphi_1)$ для $\varphi_1 \in [0; 2\pi]$ показані

на рис. 11.

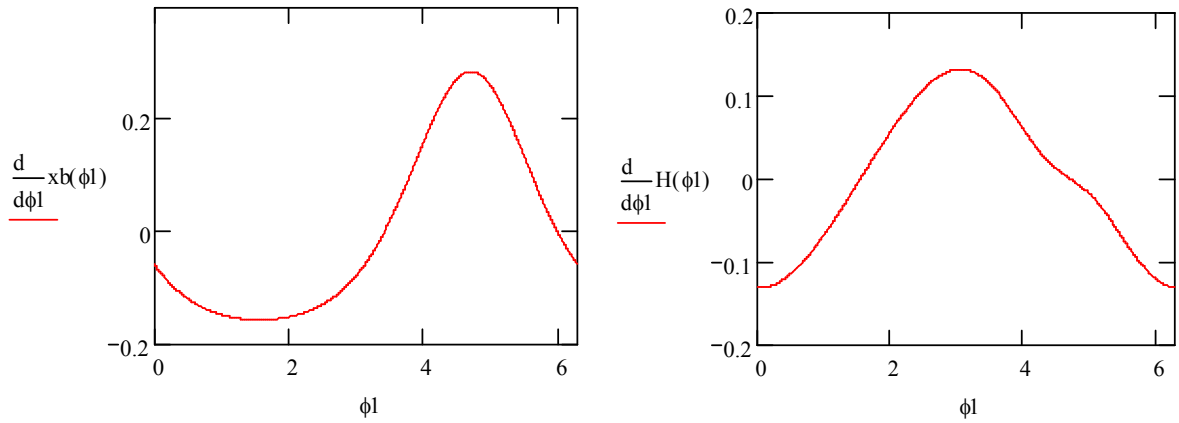


Рис. 11.

Для знаходження передаточних функцій прискорень (проекцій прискорень на осі координат) окремих точок рухомих ланок та передаточної функції кутового прискорення ланки 3, рівняння контурів в неявному виді, продиференційовані по φ_1 , вдруге диференціюємо по узагальненій координаті.

Контур (0-1-2-3-0).

Записуємо рівняння контуру, вдруге продиференційовані по φ_1 :

$$\frac{\partial^2 x_A}{\partial \varphi_1^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi_1^2} \cos \varphi_3 - \frac{\partial h}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} \sin \varphi_3 - \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varphi_1^2} h \sin \varphi_3 - \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} \left(\frac{\partial h}{\partial \varphi_1} \sin \varphi_3 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} h \cos \varphi_3 \right),$$

$$\frac{\partial^2 y_A}{\partial \varphi_1^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi_1^2} \sin \varphi_3 + \frac{\partial h}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} \cos \varphi_3 + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varphi_1^2} h \cos \varphi_3 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} \left(\frac{\partial h}{\partial \varphi_1} \cos \varphi_3 - \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} h \sin \varphi_3 \right);$$

або

$$a_{\varphi_1 A_x} = a_{\varphi_1 A} \cos \varphi_3 - u_{31} v_{\varphi_1 A} \sin \varphi_3 - \varepsilon_{\varphi_1 3} h \sin \varphi_3 - u_{31} (v_{\varphi_1 A} \sin \varphi_3 + u_{31} h \cos \varphi_3),$$

$$a_{\varphi_1 A_y} = a_{\varphi_1 A} \sin \varphi_3 + u_{31} v_{\varphi_1 A} \cos \varphi_3 + \varepsilon_{\varphi_1 3} h \cos \varphi_3 + u_{31} (v_{\varphi_1 A} \cos \varphi_3 - u_{31} h \sin \varphi_3);$$

де $a_{\varphi_1 A_x} = \frac{a_{A_x}}{\omega_1} = \frac{\partial^2 x_A}{\partial \varphi_1^2}$ і $a_{\varphi_1 A_y} = \frac{a_{A_y}}{\omega_1} = \frac{\partial^2 y_A}{\partial \varphi_1^2}$ - передаточні функції проекцій

прискорення точки А (з ланками 1 і 2) на осі координат O_1x і O_1y :

$$a_{\varphi_1 A} = \frac{a_{A_2 A_3}}{\omega_1} = \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi_1^2} - \text{передаточна функція прискорення точки А (аналог}$$

прискорення точки А), в її русі з ланкою 2 вздовж осі ланки 3;

$$\varepsilon_{\varphi_1 3} = \frac{\varepsilon_3}{\omega_1} = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varphi_1^2} - \text{передаточна функція кутового прискорення ланки 3 -}$$

аналог кутового прискорення ланки 3.

Одержана система рівнянь являється лінійною відносно невідомих $a_{\varphi_1 A}$ і ε_{φ_3} . Складаємо визначник системи лінійних рівнянь

$$D = \begin{vmatrix} \cos \varphi_3 & -h \sin \varphi_3 \\ \sin \varphi_3 & h \cos \varphi_3 \end{vmatrix} \quad h \cos^2 \varphi_3 + h \sin^2 \varphi_3 = h.$$

Визначники D_h і D_{φ_3} одержуємо із D шляхом заміни відповідних стовбців із коефіцієнтів при невідомих, стовбцями, складеними із вільних членів:

$$\begin{aligned} D_h &= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_A}{\partial \varphi_1^2} + 2 \frac{\partial h}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} \sin \varphi_3 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} \right)^2 h \cos \varphi_3 & -h \sin \varphi_3 \\ \frac{\partial^2 y_A}{\partial \varphi_1^2} + 2 \frac{\partial h}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} \cos \varphi_3 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} \right)^2 h \sin \varphi_3 & h \cos \varphi_3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_{\varphi_1 A_x} + 2v_{\varphi_1 A} u_{31} \sin \varphi_3 + u_{31}^2 h \cos \varphi_3 & -h \sin \varphi_3 \\ a_{\varphi_1 A_y} + 2v_{\varphi_1 A} u_{31} \cos \varphi_3 + u_{31}^2 h \sin \varphi_3 & h \cos \varphi_3 \end{vmatrix} = \\ &= a_{\varphi_1 A_x} h \cos \varphi_3 + 2v_{\varphi_1 A} u_{31} h \sin \varphi_3 \cos \varphi_3 + u_{31}^2 h^2 \cos^2 \varphi_3 + \\ &+ a_{\varphi_1 A_y} h \sin \varphi_3 - 2v_{\varphi_1 A} u_{31} h \sin \varphi_3 \cos \varphi_3 + u_{31}^2 h^2 \sin^2 \varphi_3 = \\ &= h(a_{\varphi_1 A_x} \cos \varphi_3 + u_{31}^2 h^2 + a_{\varphi_1 A_y} \sin \varphi_3); \\ D_{\varphi_3} &= \begin{vmatrix} \cos \varphi_3 & \frac{\partial^2 x_A}{\partial \varphi_1^2} + 2 \frac{\partial h}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} \sin \varphi_3 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} \right)^2 h \cos \varphi_3 \\ \sin \varphi_3 & \frac{\partial^2 y_A}{\partial \varphi_1^2} + 2 \frac{\partial h}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} \cos \varphi_3 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} \right)^2 h \sin \varphi_3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \cos \varphi_3 & v_{\varphi_1 A_x} + 2v_{\varphi_1 A} u_{31} \sin \varphi_3 + u_{31}^2 h \cos \varphi_3 \\ \sin \varphi_3 & v_{\varphi_1 A_y} - 2v_{\varphi_1 A} u_{31} \cos \varphi_3 + u_{31}^2 h \sin \varphi_3 \end{vmatrix} = \\ &= v_{\varphi_1 A_y} \cos \varphi_3 + 2v_{\varphi_1 A} u_{31} \cos^2 \varphi_3 + u_{31}^2 h^2 \sin \varphi_3 \cos \varphi_3 - \\ &- 2v_{\varphi_1 A} u_{31} h \sin^2 \varphi_3 - u_{31}^2 h \sin \varphi_3 \cos \varphi_3 = \\ &= v_{\varphi_1 A_y} \cos \varphi_3 - v_{\varphi_1 A_x} \sin \varphi_3 + 2v_{\varphi_1 A} u_{31} (\cos^2 \varphi_3 + \sin^2 \varphi_3) = \\ &= v_{\varphi_1 A_y} \cos \varphi_3 - v_{\varphi_1 A_x} \sin \varphi_3 + 2u_{31} v_{\varphi_1 A}. \end{aligned}$$

Корені рівнянь системи знаходимо по правилу Крамера:

$$a_{\varphi_1 A} = \frac{D_h}{D} \frac{h(a_{\varphi_1 A_x} \cos \varphi_3 + u_{31}^2 h + a_{\varphi_1 A_y} \sin \varphi_3)}{h}$$

$$= a_{\varphi_1 A_x} \cos \varphi_3 + u_{31}^2 h + a_{\varphi_1 A_y} \sin \varphi_3;$$

$$\varepsilon_{\varphi_1 3} = \frac{D_{\varphi_3}}{D} = \frac{v_{\varphi_1 A_y} \cos \varphi_3 + 2u_{31} v_{\varphi_1 A} - v_{\varphi_1 A_y} \sin \varphi_3}{h}.$$

Графіки $a_{\varphi_1 A} = \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi_1^2} = x_A''(\varphi_1)$ і $\varepsilon_{\varphi_1 3} = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varphi_1^2} = \varphi_3''(\varphi_1)$ для $\varphi_1 \in [0; 2\pi]$ показані

на рис. 12.

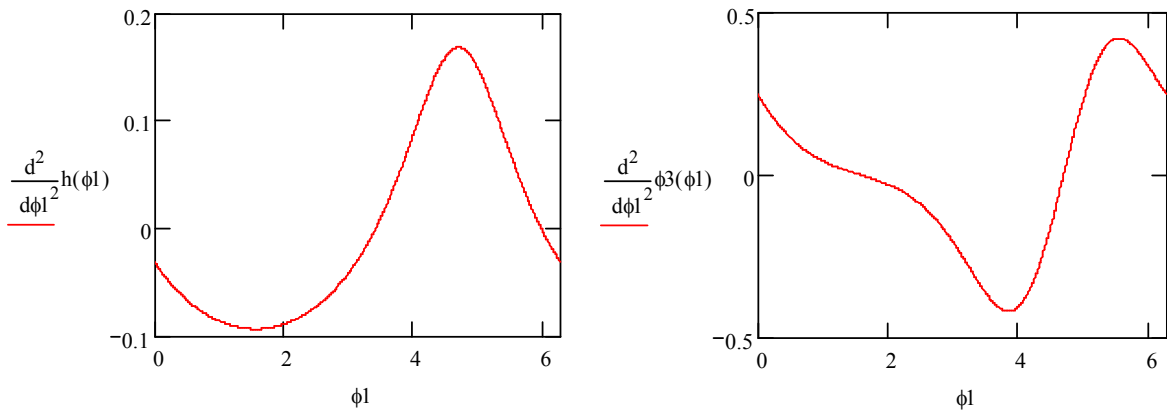


Рис. 12

Контур (0-3-4-5-0).

Запишемо рівняння контуру, вдруге продиференційовані на φ_1 :

$$\frac{\partial^2 x_B}{\partial \varphi_1^2} = \frac{\partial^2 x_A}{\partial \varphi_1^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_1^2} \cos \varphi_3 - 2 \frac{\partial H}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} \sin \varphi_3 - H \left(\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varphi_1^2} \sin \varphi_3 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} \right)^2 \cos \varphi_3 \right),$$

$$0 = \frac{\partial^2 y_A}{\partial \varphi_1^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_1^2} \sin \varphi_3 + 2 \frac{\partial H}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} \cos \varphi_3 + H \left(\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varphi_1^2} \cos \varphi_3 - \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} \right)^2 \sin \varphi_3 \right);$$

або

$$a_{\varphi_1 B_x} = a_{\varphi_1 A_x} + a_{\varphi_1 B_3} \cos \varphi_3 - 2v_{\varphi_1 B_3} u_{31} \sin \varphi_3 - H(\varepsilon_{\varphi_1 3} \sin \varphi_3 + u_{31} \cos \varphi_3),$$

$$0 = a_{\varphi_1 A_y} + a_{\varphi_1 B_3} \sin \varphi_3 + 2v_{\varphi_1 B_3} u_{31} \cos \varphi_3 + H(\varepsilon_{\varphi_1 3} \cos \varphi_3 - u_{31}^2 \sin \varphi_3);$$

де $a_{\varphi_1 B_x} = \frac{a_{B_x}}{\omega_1} = \frac{\partial^2 x_B}{\partial \varphi_1^2}$ - передаточна функція проєкції прискорення точки

В на вісь $O_1 x$;

$a_{\varphi_1 B_3} = \frac{v_{B_3}}{\omega_1} = \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_1^2}$ - передаточна функція прискорення руху точки В

вздовж ланки 3.

Одержана система рівнянь є лінійною відносно невідомих $a_{\varphi_1 B_x}$ і $a_{\varphi_1 B_3}$.
Складаємо визначник системи лінійних рівнянь

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -\cos \varphi_3 \\ 0 & -\sin \varphi_3 \end{vmatrix} = -\sin \varphi_3.$$

Визначники D_{x_B} і D_H одержуємо із D , замінюючи відповідні стовбці із коефіцієнтів при невідомих, стовбцями, складеними із вільних членів:

$$\begin{aligned} D_{x_B} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_A}{\partial \varphi_1^2} - 2 \frac{\partial H}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} \sin \varphi_3 - H \left(\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varphi_1^2} \sin \varphi_3 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} \right)^2 \cos \varphi_3 \right) & -\cos \varphi_3 \\ \frac{\partial^2 y_A}{\partial \varphi_1^2} + 2 \frac{\partial H}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} \cos \varphi_3 + H \left(\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varphi_1^2} \cos \varphi_3 - \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} \right)^2 \sin \varphi_3 \right) & -\sin \varphi_3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_{\varphi_1 A_x} - 2\nu_{\varphi_1 B_3} u_{31} \sin \varphi_3 - H(\varepsilon_{\varphi_1 3} \sin \varphi_3 + u_{31}^2 \cos \varphi_3) & -\cos \varphi_3 \\ a_{\varphi_1 A_y} + 2\nu_{\varphi_1 B_3} u_{31} \cos \varphi_3 + H(\varepsilon_{\varphi_1 3} \cos \varphi_3 - u_{31}^2 \sin \varphi_3) & -\sin \varphi_3 \end{vmatrix} = \\ &= -a_{\varphi_1 A_x} \sin \varphi_3 + 2\nu_{\varphi_1 B_3} u_{31} \sin^2 \varphi_3 + H \varepsilon_{\varphi_1 3} \sin^2 \varphi_3 + H u_{31}^2 \sin \varphi_3 \cos \varphi_3 + \\ &+ a_{\varphi_1 A_y} \cos \varphi_3 + 2\nu_{\varphi_1 B_3} u_{31} \cos^2 \varphi_3 + H \varepsilon_{\varphi_1 3} \cos^2 \varphi_3 - H u_{31}^2 \sin \varphi_3 \cos \varphi_3 = \\ &= -a_{\varphi_1 A_x} \sin \varphi_3 + a_{\varphi_1 A_y} \cos \varphi_3 + 2\nu_{\varphi_1 B_3} u_{31} + H \varepsilon_{\varphi_1 3}; \\ D_H &= \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial^2 x_A}{\partial \varphi_1^2} - 2 \frac{\partial H}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} \sin \varphi_3 - H \left(\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varphi_1^2} \sin \varphi_3 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} \right)^2 \cos \varphi_3 \right) \\ 0 & \frac{\partial^2 y_A}{\partial \varphi_1^2} + 2 \frac{\partial H}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} \cos \varphi_3 + H \left(\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varphi_1^2} \cos \varphi_3 - \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} \right)^2 \sin \varphi_3 \right) \end{vmatrix} = \\ &= a_{\varphi_1 A_y} + 2\nu_{\varphi_1 B_3} u_{31} \cos^2 \varphi_3 + H(\varepsilon_{\varphi_1 3} \cos \varphi_3 - u_{31}^2 \sin \varphi_3). \end{aligned}$$

Корені рівнянь системи знаходимо по правилу Крамера

$$\begin{aligned} a_{\varphi_1 B_x} &= \frac{D_{x_B}}{D} = \frac{a_{\varphi_1 A_x} \sin \varphi_3 - a_{\varphi_1 A_y} \cos \varphi_3 - 2u_{31}\nu_{\varphi_1 B_3} - H\varepsilon_{\varphi_1 3}}{\sin \varphi_3}; \\ a_{\varphi_1 B_3} &= \frac{D_H}{D} = \frac{a_{\varphi_1 A_y} + 2u_{31}\nu_{\varphi_1 B_3} \cos \varphi_3 + H(\varepsilon_{\varphi_1 3} \cos \varphi_3 - u_{31}^2 \sin \varphi_3)}{\sin \varphi_3}. \end{aligned}$$

$$\text{Графіки } a_{\varphi_1 B_x} = \frac{\partial^2 x_B}{\partial \varphi_1^2} = x_B''(\varphi_1) \quad \text{і} \quad a_{\varphi_1 B_3} = \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_1^2} = H''(\varphi_1) \quad \text{для} \quad \varphi_1 \in [0; 2\pi]$$

показані на рис. 13.

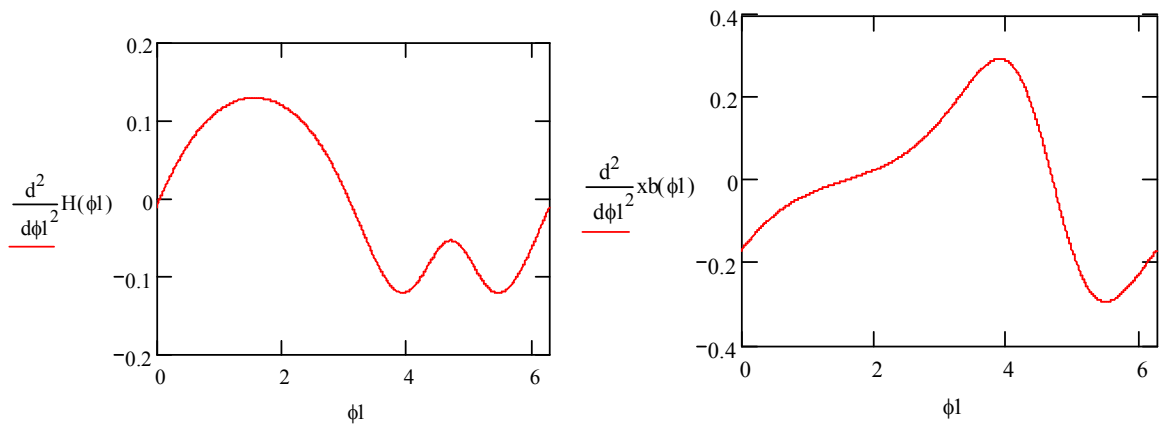


Рис. 13

Питання до самоконтролю

1. За якою ознакою визначається фактичне число степенів свободи механізму ?
2. Розкрити сутність понять «початкова ланка механізму», «узагальнена координата».
3. Вказати мету і задачі геометричного аналізу механізму.
4. Що собою представляють функції положень ведених ланок (точок які їм належать) ?
5. Сформулювати задачі, які вирішуються при застосуванні аналітичного методу кінематичного аналізу механізмів.
6. Вказати форми запису рівнянь контурів механізму, навести приклади.
7. Як визначаються кінематичні передаточні функції швидкостей окремих точок рухомих ланок та кутових швидкостей ланок, надати приклади.
8. Як визначаються кінематичні передаточні функції прискорень окремих точок рухомих ланок та кутових прискорень ланок, надати приклади.

Список літератури

1. Артоболовский И.И. Теория механизмов и машин. – М.: Высш. шк., 1988. – 640 с.
2. Левитская О.Н., Левитский Н.И. Курс теории механизмов и машин. М.: Высшая школа 1978.- 268 с.
3. Грунауер О.А. , Долгих І.Д. Теорія механізмів і машин (системний підхід). Київ НМК ВО.: 1992. - 373 с.
4. Кіницький Я.Т. Теорія механізмів і машин.–К.: Наукова думка, 2001. – 660 с.
5. Юдин В.А., Петрокас Л.В. Теория механизмов и машин М.: Высшая школа 1977. - 528 с.
6. Кожевников С.Н. Теория механизмов и машин. М.: Машиностроение. 1973. - 592с.
7. Теория механизмов и машин /Фролов К.В., Попов С.А. и др.: под ред. К.В. Фролова М.: Высш.шк., 1986. - 496 с.

Зміст

Передмова.....	3
1. Структурний аналіз механізму	4
2. Геометричний аналіз механізму	7
3. Кінематичний аналіз механізму.....	11
Питання до самоконтролю.....	19
Список літератури.....	20